فصل ۲

مجموعه اعداد حقیقی

۱.۲ مجموعه‌های عددی

مهمترین عناصر ریاضی، اعدادند. در ریاضی اعداد را دسته بندی نموده و به هر مجموعهٔ عددی ، نام خاصی داده اند. از قدیمی ترین مجموعه‌های عددی شناخته شده، مجموعهٔ اعداد طبیعی و مجموعهٔ اعداد صحیح بشکل زیرند:

$$\mathbb{N} = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \cdots\} \quad \text{مجموعه اعداد طبیعی}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\} \quad \text{مجموعه اعداد صحیح}$$

علاوه بر اینها مجموعهٔ تمام اعدادی که بتوان، آنها را بصورت کسری با صورت و مخرج صحیح نوشت را اعداد گویا نامیده و با $\mathbb{Q}$ نشان می دهیم. برای مثال

$$\frac{۳}{۲} \in \mathbb{Q} \;,\; ۰/۱۲۴۹ = \frac{۱۲۴۹}{۱۰۰۰۰} \in \mathbb{Q} \;,\; -۴/۸۹ = \frac{۴۸۹}{-۱۰۰} \in \mathbb{Q}$$

با تقسیم صورت یک کسر گویا بر مخرجش، می توان یک عدد اعشاری ساخت. به عدد اعشاری که یک یا چند رقم آن مرتباً تکرار می شوند عدد اعشاری متناوب گوئیم و این مقدار تکرار شونده را دورهٔ گردش نامیم. مثلا عدد اعشاری $۲/۷۸۸۵۶۸۵۶۸۵۶\cdots$ دارای دوره گردش ۸۵۶ است و بنابراین این عدد را می توان بشکل $۲/۷۸\overline{۸۵۶}$ نوشت. پس برای اعداد گویا می توان گفت: مجموعهٔ اعداد گویا عبارتست از مجموعهٔ اعداد اعشاری مختوم مانند $۰/۱۲۵۴۶۳$ و اعداد اعشاری متناوب مانند $۰/۱۹۰۱۹۰\cdots$. بطور خلاصه برای اعداد اعشاری می توان چنین بیان نمود:

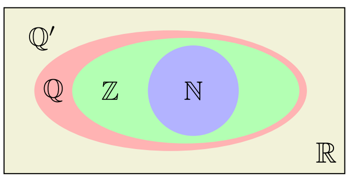
- هر عدد اعشاری مختوم یا عدد اعشاری متناوب نمایش یک عدد گویاست.
- هر تعداد صفر بعد از یک عدد اعشاری مختوم ، مقدار آنرا تغییر نمی دهد.
- عدد اعشاری که به بی نهایت ۹ ختم شود نمایش عددی گویاست.
- جمع و تفریق اعداد اعشاری مانند اعداد معمولی با حفظ مکان اعشار است.
- حاصلضرب دو عدد اعشاری مثبت یا دو عدد اعشاری منفی، مثبت است.
- هر عدد اعشاری متناوب قابل تبدیل به عددی کسری با صورت و مخرج صحیح است.

مثال ۱.۱.۲. عدد اعشاری متناوب $x = ۲/۴۵۹۹۹۹۰۰۰$ را بصورت عدد گویای کسری نشان دهید.
حل. چنین می نویسیم:

$$\begin{aligned} x &= ۲/۴۵\overline{۹} \\ ۱۰۰x &= ۲۴۵/\overline{۹} \\ ۱۰۰۰x &= ۲۴۵۹/\overline{۹} \\ ۱۰۰۰x - ۱۰۰x &= ۲۴۵۹/\overline{۹} - ۲۴۵/\overline{۹} \\ ۹۰۰x &= ۲۲۱۴ \\ x &= \frac{۲۲۱۴}{۹۰۰} \end{aligned}$$

■

علاوه بر این اعدادی وجود دارند که جزء هیچکدام از مجموعه اعداد طبیعی، صحیح و گویا نیستند مثل $\sqrt{۲}$ و π اینگونه اعداد غیرگویا، تشکیل مجموعه ای به نام مجموعهء اعداد گنگ داده که آنرا با $\mathbb{Q}'$ نشان می دهیم. لذا هر عدد اعشاری که متناوب یا مختوم نباشد گنگ (اصمّ) است. چنین مجموعه‌ای شامل اعدادی مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt[۵]{۹}$ و کلیهٔ رادیکالهائی مانند $\sqrt[n]{a}$ است که دارای ریشهٔ گویا نبوده و هر عدد اعشاری نامختوم غیرمتناوب را نیز در بر می گیرد. مشهورترین اعداد گنگ، عبارتند از عدد π برابر $۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۹۰۰۰$ و عدد نپر e برابر $۲/۷۱۸۲۸۲۰۰۰$ است که در محاسبات عددی بطور تقریبی برابر $\pi = ۳/۱۴$ و $e = ۲/۷$ در نظر گرفته می شوند. مجموعهٔ تمام



شکل ۱.۲: مجموعه‌ی اعداد حقیقی و زیرمجموعه های آن

اعداد گویا و گنگ، اعداد حقیقی را تشکیل می دهند که با $\mathbb{R}$ نشان داده شده و مجموعهٔ مرجع خواهد بود. بطور کلی $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ و $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

تمرین ۲.۲. .

۱. اعضاء مجموعه های عددی زیر را مشخص کنید. کدام مجموعه متناهی است؟

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} | x \geq -۲ \text{ و } x < ۱\} \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} | x < ۱۰ \text{ و } x > ۰/۵\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Q} | ۱ \leq x \leq ۲\} \\ D &= \{x \in \mathbb{N} | x \geq ۲ \text{ و } x < ۱۰ \text{ و } x \text{ فرد است}\} \end{aligned}$$

۲. درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین نمائید.

$$\frac{۲}{۵}\in\mathbb{N}\ ,\ \ \frac{۳}{۵}\in\mathbb{Z}\ ,\ \ ۰/۴\in\mathbb{N}\ ,\ \ -۰/۲۵\in\mathbb{Q}\ ,\ \ \sqrt{۳/۱۴}\in\mathbb{Q}\ ,\ \ -۱/\overline{۳}\in\mathbb{R}$$
$$\frac{\sqrt{۲}}{۵}\in\mathbb{R}\ ,\ \ \frac{۹}{۳}\in\mathbb{N}\ ,\ \ -\sqrt{\frac{۱}{۹}}\in\mathbb{Z}\ ,\ \ \sqrt{۱۲۱}\in\mathbb{Q}'\ ,\ \ \sqrt[۳]{\pi^{۵}}\in\mathbb{R}\ ,\ \ -\frac{۲}{۳}\in\mathbb{Q}'$$

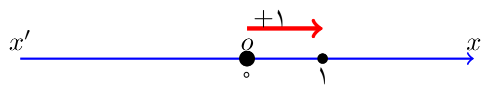
۳. حاصلجمع دو عدد ۰/۹۹۹۹۰۰۰ و ۰/۱۱۱۱۱۰۰۰ چیست؟

۴. دو عدد گنگ مثال بزنید که حاصل جمعشان عددی گویا باشد.

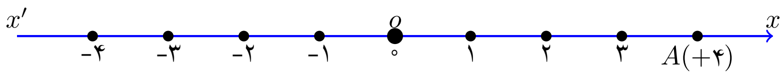
۵. آیا می توان گفت که مجموع یا حاصلضرب عدد گنگ و عدد گویا، گنگ است. مجموع و حاصلضرب دو عدد گنگ چطور؟ در هر حالت مثالی بزنید.

۱.۲.۲ محور اعداد حقیقی

محور اعداد حقیقی یا بطور مختصر محور حقیقی عبارتست از خط راستی که روی آن نقطه ای بعنوان مبدأ o اختیار نموده و یک جهت (مثبت) برای آن در نظر می گیریم. روی محور، فاصله ای دلخواه را بعنوان واحد طول در نظر گرفته و آنرا ۱ می نامیم.



بدین ترتیب هر نقطه روی این محور با یک عدد مشخص می شود که به آن طول نقطه گوئیم مثلاً $A(+۴)$ یعنی نقطه A دارای طول ۴+ است. برای رسم این نقطه روی محور در جهت مثبت ۴ واحد جلو بروید [۱] (شکل ۲.۲).



شکل ۲.۲: محور اعداد حقیقی و مکان یک نقطه بر روی آن

فواصل عددی روی محور را بازه نامیده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}
\text{بازه‌ی بسته } [a,b] &= \{x\in\mathbb{R} | a\le x\le b\}\\
\text{بازه‌ی نیم بسته یا نیم باز } (a,b] &= \{x\in\mathbb{R} | a< x\le b\}\\
\text{بازه‌ی نیم بسته یا نیم باز } [a,b) &= \{x\in\mathbb{R} | a\le x< b\}\\
\text{بازه‌ی باز } (a,b) &= \{x\in\mathbb{R} | a< x< b\}
\end{aligned}$$

تفاوت چهار بازهٔ بالا در نقاط ابتدائی و یا انتهائی آنهاست. در حالتی که بازه، از یک طرف به بی نهایت منتهی شود [۲]، بازه را باز می گذاریم مانند مثال زیر

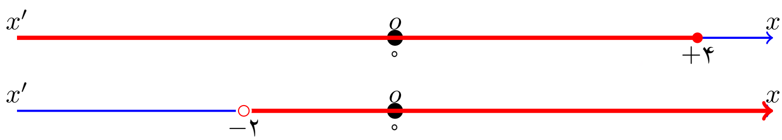
[۱] برخی کتب آموزشی برای محور دو جهت رسم می کنند، که امری اشتباه محسوب شده و می بایست تنها یک جهت، آنهم برای نشان دادن جهت مثبت برای محور قائل شد.

[۲] یعنی تا انتهای محور کشیده می شود.

مثال ۱.۲.۲. بازه های $(-۲, +\infty)$ و $(-\infty, ۴]$ را مشخص و آنها را روی محور نشان دهید.
حل. این دو بازه چون از یکطرف به بی نهایت ختم می شوند چنانند که در شکل ۳.۲ زیر نمایش داده شده‌اند.

$$\begin{aligned}(-\infty, ۴] &= \{x \in \mathbb{R} | x \leq ۴\}\\ (-۲, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} | x > -۲\}\end{aligned}$$

■



شکل ۳.۲: نمایش بازه های نامحدود بر محور اعداد

مثال ۲.۲.۲. بازه ها را بایستی بعنوان مجموعه های عددی بررسی نمود.

$$\begin{array}{rcl}(۱, ۳] \subset [۱, ۴) & , & \frac{۴}{۳} \notin [-۲, ۱]\\ (-\infty, ۴] \cap (۲, \infty) = (۲, ۴] & , & (-\infty, ۳] \cap (۱, ۵) = (۱, ۳]\\ (۲, ۴] - [۳, ۵) = (۲, ۳) & , & (-۲, \infty) \cup (-\infty, -۲) = \mathbb{R} - \{-۲\}\end{array}$$

مطلب ۲.۱

برخی از روابط بین اعداد حقیقی دلخواه a و b چنین است:

$$\begin{array}{lll}-(a+b) = (-a) + (-b), & a \times ۰ = ۰, & -(+a) = -a,\\ (-a) \times (-b) = a \times b, & a \times ۱ = a, & -(-a) = +a.\end{array}$$

بعلاوه اگر $ab = ۰$ سپس $a = ۰$ یا $b = ۰$.

تمرین ۳.۲. حاصل مجموعه‌های زیر را حساب کنید:

$$\begin{array}{llcll}(a) & (-\infty, ۴] \cap (-\infty, ۵) & , & (b) & (-\infty, -۲] \cup (-۲, \infty)\\ (c) & (-۲, \infty) \cup (-\infty, ۲) & , & (d) & \{(-۱, \infty) - (-\infty, ۱)\} \cap (۰, ۲]\\ (e) & (۱, ۳) - [۱, ۳) & , & (f) & \{(-\infty, ۲/۵) \cap (-۳, \infty)\}' \cap (-۱, ۴]\end{array}$$

۱.۳.۲ کسرها

معنای یک کسر همان معنای تقسیم است یعنی

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

که برای b ناصفر با معناست. روابط کسری بین اعداد حقیقی دلخواه $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ و چهار عمل اصلی چنین است:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

به این شرط که $b \neq ۰$ و $d \neq ۰$ باشد. همچنین عدد ناصفر a دارای چنین رفتارهائی است:

$$\frac{a}{۱} = a \quad , \quad \frac{۰}{a} = ۰ \quad , \quad \frac{a}{۰} = \infty \quad , \quad \frac{a}{\infty} = ۰$$

قرار دادن منفی در پشت کسر و یا صورت و مخرج کسر تفاوتی نخواهد کرد:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

برای تساوی کسری $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، ترکیب نسبت و تفضیل نسبت در صورت و مخرج عبارتند از

ترکیب نسبت در مخرج $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$, ترکیب نسبت در صورت $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

تفضیل نسبت در مخرج $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$, تفضیل نسبت در صورت $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

توجه داشته باشید که

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

۴.۲ اعمال دیگر روی اعداد

۱.۴.۲ فاکتوریل

برای عدد طبیعی n، مقدار فاکتوریل $n!$، عددی است که چنین تعریف می شود:

$$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times \cdots \times (n-۱) \times n$$

حاصل این مقدار نیز عددی طبیعی است. مثلاً مقادیر !۵ و !۷ چنینند:

$$۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$$
$$۷! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ = ۵۰۴۰$$

قرارداد می کنیم که $۰! = ۱$ و $۱! = ۱$.

۲.۴.۲ توان

برای عدد حقیقی مانند a و عدد طبیعی مانند n عدد تواندار a^n عبارتست از حاصلضرب n بار عدد a یعنی

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ عامل}}$$

عدد a را پایه و عدد n را توان یا نما گوئیم. برای اعداد حقیقی ناصفری مانند a و b و اعداد صحیح m و n داریم:

$$a^{n} = a \times a^{n-1} \quad , \quad (+a)^n = +a^n \quad , \quad a^{0} = 1 \quad , \quad a^{1} = a$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \quad , \quad a^n \times b^n = (ab)^n \quad , \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad , \quad (a^{-1})^{-1} = a$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

همچنین

$$(-a)^n = \begin{cases} +a^n & \text{زوج } n, \\ -a^n & \text{فرد } n. \end{cases}$$

منظور از توان مرکب عدد a^{m^n} محاسبهٔ توان m^n بطور جداگانه و سپس لحاظ آن برای عدد a می باشد. در حالت کلی تر توان یک عدد می تواند عددی حقیقی باشد، مثلاً

$$\left(\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{7}}\right)^{\pi} = 3^{\frac{10\pi}{21}}$$

بعنوان کاربردی از قواعد فوق به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱.۴.۲. حاصل عبارت زیر چیست؟

$$\frac{2^7 \times 3^{-4} \times 4^3}{3^2 \times (4^5)^2} \times \frac{3^5 \times 2^{-6}}{4^{-12}}$$

حل. طبق خواص توان، عبارت را ساده می کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{2^7 \times 3^{-4} \times 4^3}{3^2 \times (4^5)^2} \times \frac{3^5 \times 2^{-6}}{4^{-12}} &= \frac{2^7 \times 3^{-4} \times 4^3 \times 3^5 \times 2^{-6}}{3^2 \times 4^{10} \times 4^{-12}} \\
&= \frac{2^{7-6} \times 3^{-4+5} \times 4^3}{3^2 \times 4^{10-12}} \\
&= \frac{2 \times 3 \times 4^3}{3^2 \times 4^{-2}} \\
&= \frac{2 \times 4^3 \times 4^2}{3} \\
&= \frac{2 \times (2^2)^5}{3} \\
&= \frac{2^{11}}{3}
\end{aligned}$$

■

۳.۴.۲ رادیکال

برای عدد حقیقی مانند a و عدد طبیعی مانند n مقدار رادیکال $\sqrt[n]{a}$ را ریشهٔ $n-$ام a نامیده و عبارتست از وجود عددی مانند b چنانکه $a = b^n$. n را فرجهٔ رادیکال گوئیم و معمولاً عدد ۲ را در فرجه نمی نویسیم. مقدار $\sqrt{a}$ را جذر a و مقدار $\sqrt[3]{a}$ را کعب a خوانند. هنگامی که مقدار n زوج باشد a باید مثبت تعریف شود. همچنین مقدار $\sqrt[n]{a^m}$ را می توان به شکل عدد تواندار $a^{\frac{m}{n}}$ نمایش داد، یعنی

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

که برای $a-$ی مثبت یا m فرد قابل تعریف است. علاوه بر این

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ , \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ , \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \ , \quad \sqrt[n]{c^n.a} = c\sqrt[n]{a}$$

و

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{مثبت } a \text{ زوج و } n, \\ -a & \text{منفی } a \text{ زوج و } n, \\ a & \text{فرد } n. \end{cases}$$

مثال ۲.۴.۲. عبارت رادیکالی زیر را ساده نمائید.

$$۲\sqrt[3]{۱۶} + ۳\sqrt[3]{۵۴} - ۹\sqrt[3]{۱۹۲}$$

حل. هر عدد زیر رادیکال را به عوامل اول تجزیه کرده و با حذف توانی از آن، عدد را از زیر رادیکال خارج می کنیم:

$$\begin{aligned} ۲\sqrt[3]{۱۶} + ۳\sqrt[3]{۵۴} - ۹\sqrt[3]{۱۹۲} &= ۲\sqrt[3]{۲^۴} + ۳\sqrt[3]{۲ \times ۳^۳} - ۹\sqrt[3]{۲^۶ \times ۳} \\ &= ۲ \times ۲\sqrt[3]{۲} + ۳ \times ۳\sqrt[3]{۲} - ۹ \times ۲^۲\sqrt[3]{۳} \\ &= ۴\sqrt[3]{۲} + ۹\sqrt[3]{۲} - ۳۶\sqrt[3]{۳} \\ &= -۲۳\sqrt[3]{۲} \end{aligned}$$

■

معمولاً در کسرهائی که مخرج رادیکالی دارند، سعی خواهیم نمود که رادیکال مخرج را حذف کرده و اصطلاحاً مخرج کسر را گویا کنیم. برای اینکار برای کسری با مخرج $\sqrt[n]{a^m}$ کافیست صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ ضرب نموده و مخرج را به a تحویل نمائیم. مخرج کسرهای زیر را گویا کرده ایم:

$$\frac{۳}{\sqrt{۲}} = \frac{۳ \times \sqrt{۲}}{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\frac{۳}{\sqrt[5]{۴^۲}} = \frac{۳ \times \sqrt[5]{۴^۳}}{\sqrt[5]{۴^۲} \times \sqrt[5]{۴^۳}} = \frac{۳\sqrt[5]{۴^۳}}{۴}$$

دقت کنید که تنها مخرج گویا شده ولی کسر لزوما گویا نخواهد بود.

۴.۴.۲ لگاریتم

اگر $a > ۰$، $b > ۰$ و c سه عدد حقیقی باشند چنانکه $a = b^c$ باشد سپس « لگاریتم a در پایه b» که بصورت $\log_b^a$ نوشته می شود برابر با عدد c است. عمل لگاریتم برای ساده کردن اعداد بزرگ استفاده شده و با آن می توان محاسبات اعداد بزرگ را آسان نمود. با استفاده از تعریف لگاریتم مثال های زیر را داریم:

$$
\begin{aligned}
۱۰۰ = ۱۰^{۲} &\iff \log_{۱۰} ۱۰۰ = ۲\\
۱۶ = ۲^{۴} &\iff \log_{۲} ۱۶ = ۴\\
۶۲۵ = ۵^{۴} &\iff \log_{۵} ۶۲۵ = ۴\\
۵۱۲ = ۲^{۹} &\iff \log_{۲} ۵۱۲ = ۹
\end{aligned}
$$

مطلب ۲.۲: خواص لگاریتم

برای α، β و γ های حقیقی و مثبت و m و n حقیقی روابط زیر برقرار است:

$$
\begin{array}{lclcl}
\log \alpha\beta = \log \alpha + \log \beta & , & \log_\beta^{۱} = ۰ & , & \log_{\beta^m}^{\alpha^n} = \dfrac{n}{m} \log_\beta^\alpha \\
\log \dfrac{\alpha}{\beta} = \log \alpha - \log \beta & , & \log_\beta^\beta = ۱ & , & \log_\beta^\alpha \times \log_\alpha^\beta = ۱ \\
\log \alpha^n = n \log \alpha & , & \beta^{\log_\beta^\alpha} = \alpha & , & \log_\beta^\alpha \times \log_\gamma^\beta = \log_\gamma^\alpha
\end{array}
$$

وقتی پایه نوشته نمی شود یعنی مقدار آن برابر ۱۰ است. در حالت خاص اگر پایهٔ b برابر e باشد، بجای $\log_e^\alpha$ می نویسیم $\ln \alpha$ و آنرا لگاریتم نپری یا لگاریتم طبیعی گوئیم. علاوه بر اینکه خواص بالا را می توان برای لگاریتم نپری مجدداً بازگو نمود، باید ذکر نمائیم که

$$
e^{\beta \ln \alpha} = \alpha^\beta \quad , \quad e^{\ln \alpha} = \alpha \quad , \quad \ln e = ۱
$$

که در موارد متعدد از آنها استفاده می شود.

مثال ۳.۴.۲. مطلوبست حل معادلهٔ لگاریتمی $\log_{۳}^{x-۱} + \log_{۳}^{x+۱} = ۱$.

حل. طبق خواص لگاریتم می نویسیم:

$$
\begin{aligned}
\log_{۳}^{x-۱} + \log_{۳}^{x+۱} &= ۱\\
\log_{۳}^{(x-۱)(x+۱)} &= ۱\\
\log_{۳}^{x^{۲}-۱} &= ۱\\
x^{۲} - ۱ &= ۳\\
x &= \pm ۲\\
x &= ۲
\end{aligned}
$$

و مقدار $x = -۲$ قابل پذیرش نیست زیرا لگاریتم روی اعداد مثبت تعریف می شود. ■

تمرین ۵.۲. .

۱. عبارات زیر را ساده کنید.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & \left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}\right)\div\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}\right) & , & (b) & \left(\frac{۱}{۶}-\frac{۴}{۳}-\frac{۲}{۹}\right)\times\left(۲\frac{۳}{۴}+۶\frac{۵}{۶}\right) \\
(c) & \frac{۲^{۷}\times ۵^{-۴}\times ۴^{۳}}{۵^{۲}\times (۴۵)^{۲}}\times\frac{۵^{۶}\times ۲^{-۶}}{۴^{-۱۲}} & , & (d) & \left(\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۳}\right)^{۴}\div\left(\frac{۵}{۲}\right)^{۲۳} \\
(e) & \frac{۲^{۱}}{۱!}+\frac{۲^{۲}}{۲!}+\frac{۲^{۳}}{۳!}+\frac{۲^{۴}}{۴!} & , & (f) & \frac{\sqrt[۳]{۴^{۷}}\times ۲^{۲}\times\sqrt[۴]{۲^{۹}}\times\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt{۲^{۳}}\times ۲^{۵}} \\
(g) & ۵\sqrt{۸}-۳\sqrt{۲}-۴\sqrt{۳۲} & , & (h) & ۲\sqrt{۲۷}-۴\sqrt{۳}+۱۲\sqrt{۲۴۳} \\
(i) & \frac{۴^{۴۴}+۴^{۴۴}+۴^{۴۴}+۴^{۴۴}}{۲^{۲۲}+۲^{۲۲}} & , & (j) & \frac{\sqrt[۴]{\sqrt[۵]{۳^{۲}}}\times\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{۳^{۳}}}}{\sqrt{\sqrt{۳}}} \\
(k) & \sqrt[۳]{۵^{۳}\sqrt{۵^{۴}\sqrt{۵^{۴}}}} & , & (\ell) & (\frac{۱}{۹})^{-۲}(\frac{۲}{۲۷})^{۲}(\frac{۸۱}{۱۸})
\end{array}
$$

۲. مقدار عدد $۵^{۲۳۲}$ چقدر است.

۳. مخرج عبارات زیر را گویا نمائید.

$$
(a)\frac{۱}{\sqrt{۲}}\ ,\ (b)\frac{۲}{\sqrt{۶}}\ ,\ (c)\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\ ,\ (d)\frac{۲}{\sqrt[۳]{۴}}\ ,\ (e)\frac{۱}{\sqrt[۳]{۵}}\ ,\ (f)\frac{\sqrt[۳]{۲}}{\sqrt[۵]{۲}}
$$

۴. آیا عبارت $\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ درست است؟ مثال بیاورید.

۵. عبارات لگاریتمی زیر را با استفاده از خواص لگاریتم ساده کنید.

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \log_{۱۰}^{۰/۱}+۲\log_{۳}^{۹}+\log_{۲}^{۸} \\
(b) & \log_{\sqrt{۳}}^{۸۱}-۳\log_{\sqrt{۵}}^{\sqrt[۳]{(۲۵)^{۵}}} \\
(c) & \log_{۲}^{۳۰}+\log_{۲}^{۱۵}-\log_{۲}^{۹} \\
(d) & \log_{۲}۳۲+۳\log_{۲}۶۴-۲\log_{۲}۱۶ \\
(e) & \log_{۳}\sqrt[۳]{۴^{۲}}-۲\log_{۹}\sqrt[۴]{۲}+۴\log_{۸۱}\sqrt[۵]{۱۶^{۳}} \\
(f) & ۴\log_{۱۰۰}۰/۰۰۱-۳\log_{۱۰۰}\sqrt[۵]{۱۰۰۰^{۴}}+۹\log_{۱۰}\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۱} \\
(g) & \log_{۴}\sqrt[۶]{۲}\sqrt[۴]{۳۲}-\log_{۳۶}\sqrt[۵]{۷۲\times ۴\times ۲۷} \\
(h) & \log_{\sqrt{۵}}^{\sqrt[۳]{(۲۵)^{۵}}}+\log_{۲}^{۳۰}-\log_{۲}^{۱۵}-\log_{۲}^{۸}
\end{array}
$$

۶. مطلوبست حل معادلات لگاریتمی زیر

$$
(i)\ \ \log_{۵}^{x}+\log_{۵}^{x+۴}=۱\ \ ,\ \ (j)\ \ \log_{۳}^{x+۲}-\log_{۳}^{۲x+۱}=۲
$$

۱.۵.۲ نماد علمی و استاندارد علمی

در محاسبات علمی از توانهای ۱۰ زیاد استفاده می شود و در محاسبات نیز، برای تبدیل مقیاسها طبق استاندارهای بین المللی باید ضرایب ۱۰ را بکار برد. نمایش عدد با ضریب توانی از ۱۰ را عدد علمی یا نماد علمی نامند. مثلاً می دانیم هر کیلومتر برابر ۱۰۰۰ متر است و می‌نویسیم $1\ \mathrm{km} = 1000\ \mathrm{m}$ و با نماد علمی $1\ \mathrm{km} = 10^{3}\ \mathrm{m}$ که محاسبات را ساده تر خواهد کرد. در نگارش نماد علمی ضرایب عددی را با یک عدد صحیح نوشته و مابقی را بعد از اعشار ذکر می کنیم. برای مثال بجای ۱۳۵۲ می نویسیم $1/352 \times 10^{3}$.

مثال ۱.۵.۲. (زیست) جرم خشک یک ذره ویروس تبخال [۳] را با میکروسکپ الکترونیکی اندازه گرفته اند. وزن نوکلئوتید (DNA) آن 2×10^{-16} گرم، وزن کپسید (پوشش) 5×10^{-16} گرم و وزن نوکلئوکپسید آن 8×10^{-16} گرم بوده است. وزن این ویروس چند گرم است.

حل. مجموع وزن نوکلئوتید، کپسید و نوکلئوکپسید این ویروس برابر 15×10^{-16} گرم یا $1/5 \times 10^{-15}$ گرم است. ■

تبدیل مقیاسهای علمی عموماً با پیشوندهای بین المللی SI انجام می گیرد. این پیشوندها مطابق جدول زیرند:

ضریب	پیشوند	نماد	ضریب	پیشوند	نماد
10^{24}	یوتا	Y	10^{-1}	دسی	d
10^{21}	زتا	Z	10^{-2}	سانتی	c
10^{18}	اگزا	E	10^{-3}	میلی	m
10^{15}	پتا	P	10^{-6}	میکرو	μ
10^{12}	ترا	T	10^{-9}	نانو	n
10^{9}	گیگا	G	10^{-12}	پیکو	p
10^{6}	مگا	M	10^{-15}	فمتو	f
10^{3}	کیلو	k	10^{-18}	آتو	a
10^{2}	هکتو	h	10^{-21}	زپتو	z
10^{1}	دکا	da	10^{-24}	یوکتو	y

دقت کنید در ضریب واحدها حروف کوچک و بزرگ متفاوتند. ضرایب واحدها در کمیت‌ها بکار می روند و بجز برای پیشوند کمیت ها، به تنهائی معنایی نخواهند داشت. کمیت های فیزیکی معمول مطابق جدول زیرند:

نماد در cgs	واحد	نماد در SI	واحد	کمیت
cm	سانتیمتر	m	متر	طول
gr	گرم	kg	کیلوگرم	جرم
s	ثانیه	s	ثانیه	زمان
mol	مول	mol	مول	مقدار ماده
K	کلوین	K	کلوین	دمای ترمودینامیکی
A	آمپر	A	آمپر	جریان الکتریکی
cd	کاندلا	cd	کاندلا	شدت نور

[۳] Strain 1140

واحدهای بزرگی هم در نجوم برای سنجش مسافت استفاده می شوند مانند سال نوری ly و آن مسافتی است که نور در یک سال طی می کند و برابرست با

$$۱\,\mathrm{ly} = ۳ \times ۱۰^{۵}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \times ۳۶۵ \times ۲۴ \times ۶۰ \times ۶۰\,\mathrm{s} = ۹/۵ \times ۱۰^{۱۲}\,\mathrm{km} = ۹/۵ \times ۱۰^{۱۵}\,\mathrm{m}$$

و همچنین پارسِک[۴] Pc که برابر ۳/۲۶ سال نوری است.

مثال ۲.۵.۲. (نجوم) فاصلهٔ ستارهٔ کرکس[۵] از زمین برابر ۵ پارسِک است. این فاصله برحسب کیلومتر چقدر است؟
حل. طبق تبدیل بالا

$$\mathrm{d_{Altair}} = ۵\,\mathrm{Pc} = ۵ \times ۳/۲۶\,\mathrm{ly} = ۱۶/۳ \times ۹/۵ \times ۱۰^{۱۲}\,\mathrm{km} = ۱/۵۵ \times ۱۰^{۱۴}\,\mathrm{km}$$

یا ۱۵۵ تراکیلومتر است. ■

مثال ۳.۵.۲. (زیست) بسیاری از گونه های گیاهی بر اثر پرتوگیری کوتاه ولی شدید ماوراء بنفش با فرکانس ی برابر $\nu = ۲/۴۵GHz$ کشته می شوند. می خواهیم طول موج این نوع اشعه را برحسب سانتیمتر بیابیم. از فرمول $c = \lambda\nu$ می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{c}{\nu} \\
&= \frac{۳ \times ۱۰^{۵}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{۲/۴۵ \times ۱۰^{۹}\frac{۱}{\mathrm{s}}} \\
&= ۱/۲۲۵ \times ۱۰^{-۴}\,\mathrm{km} \\
&= ۱/۲۲۵ \times ۱۰^{-۴} \times ۱۰^{۳} \times ۱۰^{۲}\,\mathrm{cm} \\
&= ۱۲/۲۵\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

□

مثال ۴.۵.۲. (فیزیک) طبق نسبیت خاص هرگاه جسمی با سرعتی نزدیک به سرعت نور حرکت کند از دید یک ناظر از طول آن کاسته می شود. اگر طول اولیهٔ جسم $\ell_۰$ بوده و با سرعت v حرکت کند از دید ناظر طول آن برابر $\ell = \ell_۰\sqrt{۱ - \frac{v^۲}{c^۲}}$ دیده خواهد شد. برای جسمی یک متری که با سرعت ۲۷۰ هزار کیلومتر بر ثانیه حرکت می کند طول ۴۴ cm بنظر می رسد، زیرا

[۴] Parsec
[۵] Altair

$$\begin{aligned}\ell &= \ell_\circ\sqrt{۱-\frac{v^۲}{c^۲}}\\ &= ۱\,\mathrm{m}\sqrt{۱-\frac{(۲۷۰۰۰۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}})^۲}{(۳۰۰۰۰۰\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}})^۲}}\\ &= \sqrt{۱-۰/۸۱}\,\mathrm{m}\\ &= \sqrt{۰/۱۹}\,\mathrm{m}\\ &\sim ۴۴\,\mathrm{cm}\end{aligned}$$

□

(شیمی) فرض کنید در واکنشی شیمیائی، ترکیب دو مادهء A و B منجر به تولید محصولات C و D شده است. چنین واکنشی را می توان با

$$A+B\to C+D \tag{۱.۲}$$

نشان داد. مسلماً طی واکنش غلظت مواد اولیه تغییر خواهد کرد و به لحاظ ماهیت مواد، غلظت محصولات نیز می تواند متغیر باشد تا جائی که واکنش به حالت تعادل برسد. در یک محلول اسیدی چنین فرآیندی بطور طبیعی برقرار بوده و تعدادی از یونهای هیدروژن (پروتون ها) از اسید جدا شده و محلول در اسید باقی می مانند. اگر چنین واکنش تعادلی را بصورت

$$HA\rightleftarrows H^+ + A^-$$

نشان دهیم، دیده شده که برای هر اسیدی، نسبت غلظت مواد محصول به غلظت مواد اولیه دارای مقدار ثابت خاصی است که به ثابت یونش شناخته شده و با فرمول زیر تعریف می شود:

$$k_a=\frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \tag{۲.۲}$$

در این فرمول $[H^+]$ غلظت یونهای H^+، $[A^-]$ غلظت یونهای باز مزدوج و $[HA]$ غلظت اسید غیریونیزه بحساب می آید. بنابراین ثابت یونش k_a یک اسید عبارتست از نسبت غلظت یونهای H^+ در غلظت یونهای باز مزدوج آن، بخش بر غلظت اسید غیریونیزه. چنین فرمولی برای باز ضعیف BA نیز برقرار بوده و به شکل $k_b=\dfrac{[B^-][A^+]}{[BA]}$ نوشته می شود. فرمولی مشابه را نیز برای واکنش (۱.۲) به شکل $k_a=\dfrac{[C][D]}{[A][B]}$ می توان نوشت.

مثال ۵.۵.۲. غلظت یون هیدروژن در یک محلول $۰/۱M$ مولار اسید ضعیف HX مقداری برابر با $۵/۰\times ۱۰^{-۴}M$ دارد. ثابت یونش HX چقدر است؟

حل. چون $HX\rightleftarrows H^+ + X^-$ و محلول فقط از HX حاصل شده پس

$$[H^+]=[X^-]=۵/۰\times ۱۰^{-۴}M$$

غلظت HX در محلول، برابر $۰/۱M$ است و بنابراین مقدار ثابت یونش برابرست با

$$k_a=\frac{[H^+][X^-]}{[HX]}=\frac{(۵/۰\times ۱۰^{-۴})^۲}{۱/۰\times ۱۰^{-۱}}=۲/۵\times ۱۰^{-۶}$$

■

مثال ۶.۵.۲. ثابت یونش اسید استیک $(CH_۳COOH)$ برابر $۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$ است. مطلوبست محاسبهٔ
الف) غلظت یون های هیدروژن در محلول ۰/۱ مولار اسید استیک.
ب) غلظت یون های هیدروژن در محلول ۰/۱ مولار اسید استیکی که با اضافه کردن استات سدیم به آن، غلظت یونهای استات $(CH_۳COO^-)$ آن به ۱/۰ مولار افزایش یافته است.

حل. (الف) هنگامی که اسید استیک یونیزه می شود، با جداشدن یک یون H^+ یک یون استات $CH_۳COO^-$ آزاد می گردد. لذا غلظت یون های H^+ با یون های استات یکی خواهد بود، یعنی $[H^+] = [CH_۳COO^-]$. طی این یونیزاسیون، غلظت اسید غیریونیزه کاهش یافته و مقدار آن برابر

$$[CH_۳COOH] = ۰/۱۰ - ۲[H^+]$$

خواهد شد. اما غلظت H^+ در مقایسه با ۰/۱۰ بسیار ناچیز است چنانکه می توان $۰/۱۰ - ۲[H^+]$ را برابر با ۰/۱۰ گرفت. از (۲.۲) داریم

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} \\ ۱/۸ \times ۱۰^{-۵} &= \frac{[H^+][CH_۳COO^-]}{[CH_۳COOH]} \\ &= \frac{[H^+][H^+]}{۰/۱۰} \end{aligned}$$

که با ساده کردن عبارت مقدار $[H^+] = ۱/۳۵ \times ۱۰^{-۳}$ بدست می آید.
(ب) با افزایش غلظت استات در محلول، غلظت H^+ چنان کاهش می یابد که محلول به همان ثابت یونش k_a برسد. بدین ترتیب

$$k_a = \frac{[H^+][CH_۳COO^-]}{[CH_۳COOH]} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵} \tag{۳.۲}$$

طبق آنچه بیان شد جهت تعادل اسید استیک در محلول ۰/۱۰ مولار اسید، غلظت اسید بعد از یونیزاسیون

$$[CH_۳COOH] = ۰/۱۰ - ۲[H^+]$$

خواهد بود. اما غلظت H^+ در مقایسه با ۰/۱۰ بسیار ناچیز است و می توان پذیرفت که $[CH_۳COOH] = ۰/۱۰$ است. در این حالت چون غلظت اسید را با افزایش استات سدیم در ۱/۰ مول ثابت نگه داشته ایم، از (۳.۲) داریم
$\frac{[H^+] \times ۱/۰}{۰/۱} = ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$ که مقدار $[H^+] = ۱/۸ \times ۱۰^{-۶}$ حاصل می گردد. ■

مطلب دیگر اینکه آب خالص، $H_۲O$ به یونهای H^+ (پروتون) و OH^- (هیدروکسید) تجزیه می شود،

$$H_۲O \rightleftarrows H^+ + OH^-$$

که طبق گفته های قبل، غلظت مولی H^+ برابر غلظت مولی OH^- شده و بنابراین

$$k_w = \frac{[H^+][OH^-]}{[H_۲O]} = [H^+]^۲ = (۱/۰ \times ۱۰^{-۷})^۲ = ۱/۰ \times ۱۰^{-۱۴}$$

و ثابت یونش آب بدست می آید.

مثال ۲.۵.۷. (زیست) ظرفیت اکسیژن خون پستانداران حدود ۲۰۰ میلی لیتر در هر لیتر خون است که اگر این مقدار اکسیژن بطور کامل مصرف شود مقدار ۱ کیلو کالری[۶] انرژی تولید کرده و حرارت خون را ۱ درجه سانتیگراد بالا می برد. مردی ۷۰ کیلوگرمی با مصرف تمام اکسیژن موجود در ۳/۵ لیتر خون خود، چند متر می تواند صعود کند؟ $(۱\,\mathrm{Cal} = ۴/۲\,\mathrm{J})$

حل. با مصرف اکسیژن خون این مرد، مقدار $W = ۳/۵ \times ۴/۲k\,\mathrm{J} = ۱۴/۷ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J}$ انرژی تولید شده که صرف صعود وی می گردد. برای بالا رفتن h متر، باید مقدار انرژی پتانسیلی برابر با

$$W = mgh = ۷۰ \times ۹/۸۱ \times h\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} = ۶۸۶/۷h\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}}$$

بدست بیاورد پس $۶۸۶/۷h\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}} = ۱۴/۷ \times ۱۰^۳\,\mathrm{J}$ و $h \sim ۲۱\,\mathrm{m}$ مقدار حداکثر صعودی است که وی می تواند انجام دهد و بدین ترتیب در هر ۲۱ متر، بدن باید اکسیژن خود را احیا نماید. ■

۲.۵.۲ سرراست کردن اعداد اعشاری

در روش محاسباتی آمار، وقتی مقادیر عددی را ساده می کنیم ممکن است حاصل کار عددی اعشاری باشد. عمدهٔ محاسبات ما بر اساس دو رقم اعشار بوده و لازم است که اعداد را با روش قطع کردن یا گرد کردن تا دو رقم اعشار باقی بگذاریم.

[۶] Calorie

مطلب ۲.۳: عدد اعشاری

در انتهای فصل لازم است جهت یاد آوری، مطلبی درباره درج اعداد در کتب علمی بیان کنیم. بطور معمول درج هر عدد اعشاری را با تعداد اعشار مختصری انجام داده و در بسیاری از کاربردها، این مقدار اعشار با دو رقم از آن بیان می شود. مثلاً درج عدد $x = ۱۳۹۵/۲۰۱۷۱۴۳۷$ در محاسبات بعضاً دچار پیچیدگی است و بدین لحاظ تعداد اعشار را مختصر می نویسند. اگرچه مختصرنویسی در تعداد اعشار خطای ناچیزی ایجاد می کند با این حال محاسبات عددی با اعشارها، محدود به ارقام با معنی می شود. برای این کار از دو روش قطع کردن و گردکردن استفاده می شود. فرض کنید عدد اعشاری $x = ۱۳۹۵/۲۰۱۷۱۴۳۷$ را بخواهیم تا دو رقم با معنی (از اعشارها) نگه داریم. در روش قطع کردن، با حفظ دو رقم با معنی اعشار مابقی اعشارهای بعد را حذف می کنیم و عدد $x = ۱۳۹۵/۲۰$ را در نظر می گیریم. روش گردکردن نیز بر مبنای حذف اعشارهای بعدی است بجز اینکه اگر اولین اعشاری که قطع می شود رقمی بیشتر یا برابر ۵ باشد به اعشار سمت چپ یک واحد اضافه می کنیم (اصلاحاً به بالا گرد می کنیم). در صورتی که اولین اعشاری که قطع می شود یکی از ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد به اعشار سمت چپ چیزی اضافه نمی شود (به پائین گرد می کنیم). بدین ترتیب حاصل گرد کردن عدد مورد نظر $x = ۱۳۹۵/۲۰$ است. برای مثالی دیگر عدد $y = ۵/۶۳۸۲۴۰۱$ را در نظر می گیریم. با دو رقم با معنی قطع کردن، عددی برابر $y = ۵/۶۳$ حاصل می شود و تا دو رقم با معنی گردکردن کرد نیز عدد $y = ۵/۶۴$ بدست می آید.

مثلا در آزمایشی، داده‌ء حاصل از فرآیند عدد $x = ۷/۰۲۱۶۹۴\,\mathrm{mm}$ با خطای $e = ۰/۰۰۳\,\mathrm{mm}$ است. مسلماً خطای $e = ۰/۰۰۳\,\mathrm{mm}$ نشان می دهد که داده‌ء $x = ۷/۰۲۱۶۹۴\,\mathrm{mm}$ تا دو رقم اعشار دقیق و رقم سوم اعشار آن با خطا همراه است. پس ارقام اعشاری با معنی این داده تنها سه رقم بوده و سایر اعشار بی ارزش تلقی خواهند شد. بدین لحاظ می بایست با حذف ارقام بی ارزش عدد را به $x = ۷/۰۲۱\,\mathrm{mm}$ قطع یا به $x = ۷/۰۲۲\,\mathrm{mm}$ گرد نمائیم. قطع کردن یا گرد نمودن یک داده بسته به ماهیت آزمایش داشته و مهارت شخص را در این امر می طلبد.

(کامپیوتر) مبنا[۷] ی اعداد معمول در ریاضی «ده» است. عدد صحیح $a = ۸۲۵۳$ را در مبنای ۱۰ می توان بصورت

$$a = ۸۲۵۳ = ۸ \times ۱۰^{۳} + ۲ \times ۱۰^{۲} + ۵ \times ۱۰^{۱} + ۳ \times ۱۰^{۰}$$

نوشت. ارقام اعدادی که در مبنای ده نوشته می شوند عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۰۰۰، ۸ و ۹. در عدد a مشاهده می کنیم که تنها ارقام ۸، ۲، ۵ و ۳ استفاده شده است. اگر عددی در مبنای ۴ نوشته شود ارقام آن تنها ۰، ۱، ۲ و ۳ می باشند. برای تبدیل اعداد در مبنای ده به مبنای دیگر، کافیست که عدد را بر آن مبنا تقسیم کنیم. مثلاً

[۷] Base

مثال ۸.۵.۲. عدد $a = ۸۲۵۳$ را در مبنای ۴ بنویسید.
حل. با تقسیم متوالی عدد a بر ۴ و حصول خارج قسمت و باقی مانده چنین نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} ۸۲۵۳ &= ۴ \times ۲۰۶۳ + ۱ \\ ۲۰۶۳ &= ۴ \times ۵۱۵ + ۳ \\ ۵۱۵ &= ۴ \times ۱۲۸ + ۳ \\ ۱۲۸ &= ۴ \times ۳۲ + ۰ \\ ۳۲ &= ۴ \times ۸ + ۰ \\ ۸ &= ۴ \times ۲ + ۰ \end{aligned}$$

آخرین خارج قسمت را با باقی مانده ها، البته از آخر به اول می نویسیم بدین ترتیب $a = (۲۰۰۰۳۳۱)_۴$ که در مبنای ۴ بوده و همانگونه که گفتیم ارقام آن از ۳ تجاوز نمی کند. طبق ارزش مکانی ارقام، چنین می توان نوشت:

$$a = (۲۰۰۰۳۳۱)_۴ = ۲ \times ۴^۶ + ۰ \times ۴^۵ + ۰ \times ۴^۴ + ۰ \times ۴^۳ + ۳ \times ۴^۲ + ۳ \times ۴^۱ + ۱ \times ۴^۰ = (۸۲۵۳)_{۱۰}$$

■

مانند آنچه در بالا گفته شد هر عدد $a = a_n a_{n-۱} a_{n-۲} \cdots a_۱ a_۰$ را می توان در مبنای دلخواه b چنین نوشت:

$$(a_n a_{n-۱} a_{n-۲} \cdots a_۱ a_۰)_b = a_n \times b^n + a_{n-۱} \times b^{n-۱} + a_{n-۲} \times b^{n-۲} + \cdots + a_۱ \times b^۱ + a_۰ \times b^۰$$

اگرچه اکنون مبنای عددنویسی ده است ولی شمارش اعداد در حساب قدیم، شمارش شستگانی بوده و آنها اعداد را در مبنای ۶۰ می نوشتند. مبناهای مهم عبارتند از ۲، ۸، ۱۰ و ۱۶. برای مثال عدد ۳۶۱۵۲۱ را در این مبناها ببینید:

$$(۵۸۴۳۱)_{۱۶} = (۳۶۱۵۲۱)_{۱۰} = (۱۳۰۲۰۶۱)_۸ = (۱۰۱۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۱۱۰۰۰۱)_۲$$

چون برای مبنای ۱۶ نوشتن ارقام ۱۰، ۱۱، $\cdots$ و ۱۶ مقداری گیج کننده است بجای آنها بترتیب از حروف A، B، $\cdots$ و F استفاده می نمایند. برای نمونه

$$(D۱A۸F)_{۱۶} = (۸۵۸۷۶۷)_{۱۰}$$

در کامپیوتر مبنای محاسبات عدد ۲ است که در این حال، ارقام تنها ۰ و ۱ بوده و از آنها برای محاسبات منطقی استفاده می کنند. در مبنای دو تعداد ارقام اعداد معمولی، زیاد می شود مثلاً عدد $(۸۲۵۳)_{۱۰}$ در مبنای دو عبارتست از ۱۰۰۰۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱ و نیز

$$(۵۲۴۹۳۹۸۸۰۱۷۳)_{۱۰} = (۱۱۱۱۰۱۰۰۰۱۱۱۰۰۰۱۱۰۱۱۰۱۰۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱۰۱۱۰۱)_۲$$

است.

تمرین ۶.۲. تمرینات تکمیلی.

۱. عبارات زیر را ساده کنید.

$$(a)\quad \frac{2048\times 2^9\times 3^7\times 4^2\times (2^{-2})^5\times 6\div 3^5}{3^3\times 4^{11}\times 2^2}$$

$$(b)\quad 4\sqrt{5}-9\sqrt{80}+2\sqrt{45}$$

$$(c)\quad \frac{3^4\times 4^4\times 8^3\times 2^{-5}}{3^6\times (4^{-2})^2}\div\frac{2^4\times 3^{-5}}{3^7\times 8^{-6}}$$

$$(d)\quad \sqrt[5]{900\sqrt[4]{\frac{16\times 81}{625}}\times\sqrt[3]{\frac{8\times 27}{125}}\times\sqrt[2]{\frac{4\times 9}{25}}}$$

$$(e)\quad \frac{1}{1!\times 9!}+\frac{1}{3!\times 7!}+\frac{1}{5!\times 5!}+\frac{1}{7!\times 3!}+\frac{1}{9!\times 1!}$$

$$(f)\quad \left[6/2+3\frac{9}{16}\div\Big(\frac{2/75}{14\div\frac{2}{7}-2/5\div\frac{1}{18}}-\frac{7}{24}\Big)\right]\div 12/\overline{6}$$

$$(g)\quad 7\frac{1}{2}+6/8\overline{3}+5/\overline{6}+\frac{13/75+12\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+0/0625}-\frac{\frac{2}{9}+3/6\overline{1}}{1/91\overline{6}-1\frac{5}{6}}$$

$$(h)\quad \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1},\ (i)\ \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{4}-\frac{3}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}$$

$$(j)\quad \frac{3^4\times 3^{10}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[4]{27^6}\times 3^{-2}}{\sqrt[5]{3}\times\sqrt[3]{27^2}\times 3^{-4}.\sqrt[10]{3^{57}}\times 27^4},\ (k)\ \frac{2^7.16^6.\sqrt[5]{4}.8^5.\sqrt[4]{16^3}}{4^{16}.\sqrt[5]{2^2}.\sqrt[3]{64^2}.2^{-4}.8^6}$$

۲. مخرج عبارات زیر را گویا نمائید.

$$(a)\frac{10}{\sqrt{5}}\ ,\quad (b)\frac{3}{4\sqrt{3}}\ ,\quad (c)\frac{3\sqrt{2}}{7\sqrt[5]{12}}\ ,\quad (d)\frac{1}{4\sqrt[7]{2\sqrt{3}}}\ ,\quad (e)\sqrt{\frac{20}{3\sqrt{8}}}$$

۳. حاصل عبارت $\frac{7^4\times 5^7\times 3^3}{(15)^3}$ را بصورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

۴. (شیمی) در یونش آب، غلظت $H^+(aq)$ را در (الف) محلول $0/015M$ مولار HNO_3 و (ب) محلول ۰/۰۰۰۳ مولار HCl بیابید.

۵. (شیمی) در یونش آب، غلظت $OH^-(aq)$ در (الف) محلول ۰/۰۰۲۵ مولار $Ba(OH)_2$ و (ب) محلول ۰/۰۱۶ مولار $Ca(OH)_2$ چقدر است.

۶. (شیمی) غلظت یون هیدرونیوم H_3O^+ در محلول $0/1M$ اسید استیک $HOAC$ چقدر است.

۷. (نجوم) علاوه بر واحدهای بیان شده در متن، واحد دیگری که در نجوم برای سنجش فاصله بکار می برند، واحدنجومی (AU) است که برابر فاصلهٔ متوسط زمین و خورشید بوده و حدود ۱۵۰ میلیون کیلومتر است. هر سال نوری و هر پارسِک چند واحدنجومی است؟ چه مقدار زمان طول می کشد تا نور از خورشید به چشم ما برسد؟

۸. (نجوم) نزدیکترین ستاره به ما آلفای قنطورس [۸] نام دارد که حدود ۴/۳ سال نوری از ما فاصله دارد. فاصلهٔ آلفای قنطورس از ما چند پارسِک و چند واحد نجومی است؟

۹. (نجوم) نوری که از ستارگان دریافت می‌کنیم مدتها قبل از آنها ساطع شده است و حتی ممکن است مربوط به قرنها قبل باشد. نوری که اکنون از ستارهٔ نسر واقع [۹] (با فاصلهٔ $۲/۵۲ \times ۱۰^{۱۴}\ \mathrm{km}$) و ستارهٔ ابط الجوزا [۱۰] (با فاصلهٔ ۵۲۰ سال نوری) ساطع شده چند سال قبل از ستاره خارج شده است.

۱۰. (زیست) کار مکانیکی حاصل از تلمبه زدن مقدار ۱۰۰ میلی لیتر خون در سیستم رگها که تحت فشار تقریباً ۱۰۰ میلی متر جیوه انجام می‌گیرد برابرست با ۱/۳۲ ژول. این مقدار انرژی بوسیلهٔ اصطکاک به حرارت تبدیل می شود. این افزایش حرارت چقدر است؟ (راهنمائی. هر ۱ کیلوکالری انرژی، دمای آب یا خون را ۱ درجه سانتیگراد بالا می برد)

۱۱. (فیزیک) طبق قانون گرانش نیوتن بین هر دو جسم با جرم های $m\,\mathrm{kg}$ و $M\,\mathrm{kg}$ که در فاصلهٔ $r\,\mathrm{m}$ از هم قرار دارند، نیروئی برابر $F = \mathbf{G}\dfrac{mM}{r^۲}\ \mathrm{N}$ حمکفرماست. اگر جرم زمین $۵/۹۷۳۶ \times ۱۰^{۲۴}\ \mathrm{kg}$ و جرم خورشید برابر $۱/۹۸۹ \times ۱۰^{۳۰}\ \mathrm{kg}$ و فاصلهٔ مرکز آنها $۱۴۹/۶ \times ۱۰^{۶}\ \mathrm{km}$ باشد چند نیوتن نیرو بهم وارد می کنند؟ ($\mathbf{G}$ ثابت گرانش برابر $\mathbf{G} = ۶/۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}\ \frac{\mathrm{m}^۳}{\mathrm{s}^۲\,\mathrm{kg}}$ است.)

۱۲. (زیست) یاخته های بافتهای زنده تقریباً به یک اندازه اند. اگر طول یاخته نوعاً حدود ۳ میکرومتر باشد در یک بافت با حجم ۱ سانتی متر مربع چند یاخته می تواند قرار داشته باشد.

۱۳. یک پارسِک چند کیلومتر است؟

۱۴. (نجوم) فاصلهٔ ستارهٔ شِعرای یمانی [۱۱] از زمین برابر ۸/۶ سال نوری است. این فاصله برحسب کیلومتر، پارسِک و واحدنجومی چقدر است؟

۱۵. (کامپیوتر) اعداد ۲۳۳۰، ۵۱۵۸۵، ۳۶۱۵۲۱، ۱۱۲۵۹۳۷۵ و ۱۵۸۵۱۹۸۵ در مبنای ده داده شده اند. آنها را در مبنای دو، هشت و شانزده بنویسید.

[۸] α-Centauri
[۹] α-Lyra
[۱۰] α-Orion
[۱۱] Sirius